Hertentamen Afdeling Wiskunde
Analyse BWI-1 Faculteit der Exacte Wetenschappen

Datum: Dinsdag 2 juni, 18:30 - 20:30
Instructies: 6 opgaven; *motiveer alle antwoorden.*
Geen rekenmachines of boeken.

Normering: 1 (10 ptn), 2 (15 ptn), 3 (10 ptn), 4 (15 ptn), 5 (15 ptn), 6 (25 ptn).
Cijfer tentamen: ptn/10 + 1.
Eindcijfer: [3 x tentamencijfer + huiswerkcijfer]/4.

---

1. Bereken de Laplace getransfomeerde van $f(t) = e^{-2t}$ (berekening, dus geen tabel gebruiken!)

   Hint: de Laplace getransfomeerde is gedefinieerd als $(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$.

2. Bepaal, gebruikmakende van Laplace transformatie, de oplossing van de differentiaalvergelijking:
$$y'' + 5y' + 6y = x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

3. Los het volgende beginwaarde probleem op:
$$y' - xy = x, \quad y(0) = 1$$

4. Vind de oplossing van:
$$y_{n+2} + 5y_{n+1} + 6y_n = 0, \quad y_0 = 1, y_1 = 1.$$

5. Beschouw de volgende machtreeks:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

   (a) Bepaal de convergentie straal R.

   (b) Onderzoek het gedrag voor $z = \pm R$ (dwz. voor welke reële getallen op de rand van het convergentie gebied, indien van toepassing, convergeert de reeks?)

   (c) Reken de som functie uit voor reële waarden $z = x$ (Hint: gebruik dat de machtreeks oneindig vaak differentieerbaar is op het convergentiegebied).

6. Gegeven de functie $f(x) = |\sin(\frac{x}{2})|$ op het het interval $[-\pi, \pi]$.

(a) Laat zien dat de 2π-periodieke uitbreiding van f een continue en stuksgewijs differentieerbare functie is op $\mathbb{R}$.

(b) Bereken de Fourier reeks van f. (Hint: $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin(a)\cos(b)$).

(c) Geldt dat voor iedere waarde van x de Fourier reeks en f met elkaar overeen komen? (Beredeneer je antwoord).

(d) Bereken mbv (b) de som van de volgende reeksen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}.$$

(e) Gebruik de gelijkheid van Parceval om de volgende som te berekenen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}.$$

Succes

$f(t)$	$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$
1	$\frac{1}{s},\quad s > 0$
$t^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n-1}},\quad s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a},\quad s > a$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2},\quad s > 0$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2},\quad s > 0$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2},\quad s > \lvert a\rvert$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2},\quad s > \lvert a\rvert$
$H_a(t)$	$\frac{e^{-as}}{s},\quad s > 0$
$H_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$
$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$

Tabel 2.1: Tabel van functies met hun Laplace getransformeerden.