Uitwerking tentamen Analyse BWI 4-6-99

① a) Als $V \cap W = \emptyset$ dan klaar. Kies anders willekeurige $x \in V \cap W$; dan $x \in V$ én $x \in W$. Dus, omdat V en W open, is er een ε_V en een ε_W zódat $B_{\varepsilon_V}(x) \subset V$ en $B_{\varepsilon_W}(x) \subset W$. Kies $\varepsilon = \min\{\varepsilon_V, \varepsilon_W\}$. Dan $B_\varepsilon(x) \subset V \cap W$, dus x is inwendig punt van $V \cap W$, dus $V \cap W$ open.

b) Stel $U_1 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid xy > 1\}$ en $U_2 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 < 4\}$. Dan $U = U_1 \cap U_2$. Kies $f_1 = xy$ $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Dan $D_{f_1} = \mathbb{R}^3$ is open in $\mathbb{R}^3$ en f_1 is continu op $\mathbb{R}^3$. Kies $B_1 = (1, \infty)$, dan B_1 open in $\mathbb{R}$. Dus $U_1 = f_1^{-1}[B_1]$ is open in $\mathbb{R}^3$. Kies vervolgens $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $f_2 = x^2 + z^2$. Dan $D_{f_2} = \mathbb{R}^3$ is open in $\mathbb{R}^3$ en f_2 is continu op $\mathbb{R}^3$. Kies $B_2 = (-\infty, 4)$, dan B_2 open in $\mathbb{R}$. Dus $U_2 = f_2^{-1}[B_2]$ is open in $\mathbb{R}^3$. Dus $U = U_1 \cap U_2$ open (zie a)).

② a) $$\left| f(x,y) - f(0,0) \right| = \frac{|x^2 y|}{x^2+y^2} \leq \frac{(\sqrt{x^2+y^2})^2 \sqrt{x^2+y^2}}{(\sqrt{x^2+y^2})^2} = \sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow 0$$ Buiten $(0,0)$ geen problemen, dus continu.

[Formeler: Zij $\varepsilon > 0$ gegeven. Kies $\delta = \varepsilon$. Dan volgt dat voor $|\underline{x} - \underline{0}| < \delta$ geldt dat $|f(x,y) - f(0,0)| \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon$, dus f is continu in $(0,0)$.]

b) $$f_x(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0-0}{t} = 0 \qquad f_y(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

c) Een kandidaat afgeleide zou zijn $A = (0,0)$. De functie f is diff.baar in $(0,0)$ dan en slechts dan als
$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \left| \frac{f(x,y) - f(0,0) - A \cdot \binom{x}{y}}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = 0.$$
Beschouw deze limiet langs de lijn $y = x$:

$$\left| \frac{f(x,y) - f(0,0) - A\binom{x}{y}}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \overset{y=x}{=} \left| \frac{\frac{x^3}{x^2+x^2} - 0 - 0}{\sqrt{2x^2}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{x}{|x|} \not\to 0$$
Dus f niet diff.baar in $(0,0)$.

③ a) $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^3)$ dus $\cos(x+y) = 1 - \frac{1}{2}(x+y)^2 + o((x+y)^3)$

$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^3)$ dus $e^{x-y} = 1 + x - y + \frac{1}{2}(x-y)^2 + o((x-y)^3)$

Dus $T_2(x,y) = 1 - \frac{1}{2}(x+y)^2 - 1 - x + y - \frac{1}{2}(x-y)^2 + x - y = -x^2 - y^2$

b) $$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

c) $(0,0)$ is een stationair punt van f (zie bijv. Taylorpolynoom). Verder is $H_f(0,0)$ negatief definiet. Dus heeft f een maximum in $(0,0)$.

④ a) $\frac{\partial f}{\partial x}=0 \Rightarrow 6x^2-8+8z=0 \longrightarrow z=1-\frac{3}{4}x^2$ } invullen in onderste

$\frac{\partial f}{\partial y}=0 \Rightarrow 4y+4z=0 \longrightarrow y=-z$ } vergelijking geeft:

$\frac{\partial f}{\partial z}=0 \Rightarrow 8z+8x+4y-1=0$ $\qquad 8-6x^2+8x-4+3x^2-1=0$

dus $-3x^2+8x+3=0$ dus $x=3 \vee -\frac{1}{3}$

Dus $S_1=\left(3, \frac{23}{4}, -\frac{23}{4}\right)$ en $S_2=\left(-\frac{1}{3}, -\frac{11}{12}, \frac{11}{12}\right)$

b) $Hf(x,y,z)=\begin{pmatrix} 12x & 0 & 8 \\ 0 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

$Hf(S_1)$ is positief definiet; zie bijv. de determinanten van de linksboven submatrices: 36, 144 resp. 320

Dus in S_1 bevindt zich een minimum.

$Hf(S_2)$ is indefiniet. Immers:

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}^T Hf(S_2)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=-4<0$

en $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} Hf(S_2)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=8>0$. Dus er bevindt zich geen extreem in S_2.

⑤ a) $d_n=\sum_{k=0}^{n} a_k d_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{1}{(n-k)!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\frac{2^n}{n!}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} d_n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} a_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e\cdot e=e^2$

⑥ a) $\mathcal{L}(e^{at}f(t))=\int_0^{\infty} f(t)e^{at}e^{-st}\,dt=\int_0^{\infty} f(t)e^{-(s-a)t}\,dt=F(s-a)$.

b) Bekend is $\mathcal{L}(\sin t)=\frac{1}{s^2+1}$. Dus via a) vinden we:

$\mathcal{L}(e^{2t}\sin t)=\frac{1}{(s-2)^2+1}=\frac{1}{s^2-4s+5}$, $s>2$ (ivm convergentie integraal)

c) Neem de Laplace getransformeerde van de dv (stel $Y(s)=\mathcal{L}(y(t))$):

$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-4sY(s)+4y(0)+5Y(s)=0$

dus $(s^2-4s+5)Y(s)=1$; dus $Y(s)=\frac{1}{s^2-4s+5}$

dus (zie b)) $y(t)=e^{2t}\sin 2t$

P = cijfer praktikumopdracht $\quad$ T = tentamencijfer $\quad$ Eindcijfer = $\max\left\{T, \frac{P+2T}{3}\right\}$
(mits $T \geq 4.5$, anders Eindcijfer = T)